线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

n 维数组空间, 线性相关性

$$\text{空间} \xrightarrow[1:1]{\text{坐标系}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{推广}} \mathbb{F}^n = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}.$$

定义

设 $\mathbb{F}$ 为数域. 带线性运算的 n 维数组向量全体

$$\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{F}\}$$

称为n 维数组空间. 记为 $\mathbb{F}^n$.

线性组合 (组合系数, 线性表示)

定义 (线性相关, 线性无关)

一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 称为线性相关, 若存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0.$$

反之, 则称向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

子空间

给定空间中的 m 个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$. 考虑这 m 个向量的全体线性组合

$$V := \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle := \{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{a}_m \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}\}$$

这是 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集满足

1. 任取 $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V$, 都有 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in V$;
2. 任取 $\vec{b} \in V$ 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 都有 $\lambda\vec{b} \in V$.

上面两条也等价于

3. 任取 $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell \in V$ 以及 $\mu_1, \cdots, \mu_\ell$, 都有 $\mu_1\vec{b}_1 + \cdots + \mu_\ell\vec{b}_\ell \in V$.

定义

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集. 若 V 满足上述前两条或第三条, 则称 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间.

子空间可看成是三维空间中过原点的线和平面在高维时的推广.

例 (平凡子空间)

$V=\{0\}$ 或 $V=\mathbb{F}^n$.

例 (生成子空间)

$\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m\rangle$ 由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 生成的子空间.

特别地，给定一个阶矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则其所有列向量可生成 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间，其所有行向量可生成 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间。

例 (用子空间的观点来理解线性方程组)

设 $A=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m)$. 则 $Ax=\vec{b}$ 有解当且仅当 $\vec{b}\in\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m\rangle$.

例 (齐次线性方程组的解空间)

n 个变元的齐次线性方程组的解空间为 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间.

与线性映射相关的子空间

例 (线性映射的像 (image))

设 $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 为一个线性映射. 则

$$\mathrm{im}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{F}^n\} \subseteq \mathbb{F}^m$$

为 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间。称为线性映射 $\mathcal{A}$ 的像.

例 (线性映射的核 (kernel))

设 $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 为一个线性映射. 则

$$\ker(\mathcal{A}) := \{\vec{x} \in \mathbb{F}^n \mid \mathcal{A}(\vec{x}) = 0\} \subseteq \mathbb{F}^n$$

为 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间。称为线性映射 $\mathcal{A}$ 的核.

给定一组 (列) 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关;
2. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ 使得
$$\vec{a}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m;$$
3. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得
$$\vec{a}_i \in \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
4. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得
$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
5. 线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 其中 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$;
6. A 不是列满秩;
7. $\det(A) = 0$ (当 $m = n$ 时).

线性无关等价刻画

给定一组 (列) 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关;
2. 任取 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$,
$$\vec{a}_i \neq \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m;$$
3. 任意 $i \in \{1, \cdots, m\}$,
$$\vec{a}_i \notin \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
4. 任意 $i \in \{1, \cdots, m\}$,
$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle \neq \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
5. 线性方程组 $AX = 0$ 无非平凡解, 其中 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$;
6. A 为列满秩;
7. $\det(A) \neq 0$ (当 $m = n$ 时).

例

包含零向量的任意向量组线性相关.

例

设 S_1, S 为 $\mathbb{F}^n$ 为两个有限子集满足 $S_1 \subseteq S$. 则

1. S_1 线性相关 $\Rightarrow S$ 线性相关;
2. S 线性无关 $\Rightarrow S_1$ 线性无关;

例 (判定下列向量组的线性相关性)

1. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 单位坐标向量.
2. $\vec{a}_1 = (1,0,0,\cdots,0)^T, \vec{a}_2 = (1,1,0,\cdots,0)^T, \cdots,$
   $\vec{a}_n = (1,1,1,\cdots,1)^T$.
3. $\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{a}_3 + \vec{a}_1$, 其中 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关.
4. $\vec{a}_1 = (3,4,-2,5)^T, \vec{a}_2 = (2,-5,0,-3)^T, \vec{a}_3 = (5,0,-1,2)^T,$
   $\vec{a}_4 = (3,3,-3,5)^T$.

性质

任意给定一个线性映射 $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 设 $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_m \in \mathbb{F}^n$, 并记 $\vec{a}_i = \mathcal{A}(\vec{b}_i)$. 则

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_m$ 线性无关;
2. $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_m$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关;

例 (投影)

给定 m 个 r 维数组向量 $\vec{a}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ir}) \in \mathbb{F}^r$ $(i = 1, \cdots, m)$. 将每个向量都扩充为一个 n 维向量
$\vec{b}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ir}, a_{ir+1}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{F}^n$. 则

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_m$ 线性无关;
2. $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_m$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关;

极大无关组

定义 (极大无关组)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量. 若子向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 且任加另一个向量 $\vec{a}_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关, 则称 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的极大无关组.

性质 (通过生成子空间来判定极大无关组)

给定向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的一个子向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$. 则 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的极大无关组当且仅当

- $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 且
- $\langle \vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle$.